УДК 519.174

В. А. Баранский, Т. А. Королева

ХРОМАТИЧЕСКАЯ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ПОЛНЫХ ТРЕХДОЛЬНЫХ ГРАФОВ

Введение

В данной работе мы рассматриваем только обыкновенные графы, т. е. графы без петель и кратных ребер. Обозначения и терминологию для графов будем использовать в соответствии с монографией [1].

Пусть G – произвольный (n,m,k)-граф, т. е. граф, имеющий n вершин, m ребер и k компонент связности. Для натурального числа x через $P(G,x)$ обозначим число всевозможных раскрасок графа G в x заданных цветов, причем не предполагается, что в раскраске должны быть использованы все x цветов. Хорошо известно (см., например, [1] или [2]), что функция $P(G,x)$ является многочленом степени n от x, который называют *хроматическим многочленом* графа G.

Два графа называются *хроматически эквивалентными* или χ-*эквивалентными*, если они имеют одинаковые хроматические многочлены. Предположим, что каждому графу приписано некоторым образом число. Это число называют *хроматическим инвариантом*, если оно одинаково для любых двух хроматически эквивалентных графов. Хроматическими инвариантами являются число вершин, число ребер и число компонент связности графа (см. [1] или [2]). Число ребер графа G будем обозначать через $I_2(G)$. Отметим, что число вершин графа G можно было бы обозначать через $I_1(G)$.

Укажем еще два хроматических инварианта для графов (см. [3] или [4]):

$I_3(G) = \triangle(G)$ – число треугольников в графе G;

$I_4(G) = vg\,\square(G) - 2\boxtimes(G)$, где через $vg\,\square(G)$ мы обозначаем число вершинно порожденных подграфов вида $\square$ в графе G, т. е. число бесхордных 4-циклов в G, а через $\boxtimes(G)$ – число полных четырехвершинных подграфов K_4 в графе G.

Через $pt(G,i)$ будем обозначать число разбиений множества вершин графа G на i непустых коклик, т. е. подмножеств, состоящих из попарно несмежных вершин графа G. По теореме Зыкова (см. [1], с. 140)

$$P(G,x) = \sum_{i=\chi}^{n} pt(G,i)x^{(i)},$$

где через χ обозначается хроматическое число графа G, а через $x^{(i)}$ – *факториальная степень* переменной x, т. е.

$$x^{(i)} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-i+1).$$

В силу указанной теоремы числа $pt(G,i)$ $(\chi \leqslant i \leqslant n)$ являются хроматическими инвариантами.

Нас особенно будет интересовать инвариант $pt(G,\chi+1)$. Вычислим его значение для полного t-дольного графа $G = K(n_1,n_2,\ldots,n_t)$, где $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_t \geqslant 1$. Здесь $\chi = t$ и раскраска графа в t цветов дает единственное разбиение множества его вершин на t коклик – долей этого графа. Разбиение на $t+1$ непустых коклик получается из предыдущего разбиения разбиением одной из долей на два непустых подмножества. Следовательно,

$$pt(K(n_1,n_2,\ldots,n_t),t+1) = 2^{n_1-1}-1+\cdots+2^{n_t-1}-1 = 2^{n_1-1}+\cdots+2^{n_t-1}-t.$$

Граф называется *хроматически определяемым* или *χ-определяемым*, если он изоморфен любому хроматически эквивалентному ему графу. Это понятие ввели в 1978 г. Чао и Уайтхед. Различными авторами были проведены многочисленные исследования по изучению хроматической эквивалентности и хроматической определяемости для графов. Обзор полученных результатов можно найти в статьях [5–8] и монографии [9]. В этих исследованиях большое место было уделено изучению хроматической определяемости полных многодольных графов $K(n_1,n_2,\ldots,n_t)$. Многие авторы пытались изучить хроматическую определяемость полных двудольных графов, и в 1990 г. Koh и Teo доказали, что полный двудольный граф $K(n_1,n_2)$ хроматически определяем при $n_1 \geqslant n_2 \geqslant 2$. Затем в многочисленных работах были найдены разнообразные классы хроматически определяемых полных многодольных графов (см. [9]). Главная проблема здесь состоит в следующем.

Является ли хроматически определяемым полный многодольный граф $K(n_1,n_2,\ldots,n_t)$ при $t \geqslant 3$ и $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_t \geqslant 2$?

Для случая $t = 3$ разными авторами были указаны некоторые классы хроматически определяемых полных трехдольных графов (см. [9]).

Цель данной работы состоит в том, чтобы указать некоторый новый и систематический подход к изучению хроматической определяемости полных многодольных графов, использующий вводимый нами решеточный порядок на множестве таких графов и указанные ранее инварианты. Этот подход мы продемонстрируем на примере доказательства следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть n, n_1, n_2, n_3 – натуральные числа такие, что*

$$n = n_1+n_2+n_3, \quad n_1 \geqslant n_2 \geqslant n_3 \geqslant 2, \quad n \equiv 0 \pmod 3 \quad \text{и} \quad n_1 - n_3 \leqslant 4.$$

Тогда граф $K(n_1,n_2,n_3)$ является хроматически определяемым.

1. Предварительные сведения

Разбиением натурального числа n (см. [10]) называется невозрастающая последовательность целых неотрицательных чисел $u = (u_1, u_2, \dots)$ такая, что

$$n = \Sigma_{i=1}^{\infty} u_i.$$

Ясно, что последовательность u содержит лишь конечное число $\ell = \ell(u)$ ненулевых компонент. Число ℓ будем называть *длиной* разбиения u и будем писать $n = num(u)$. Для удобства будем записывать u в одном из следующих видов: $u = (u_1, u_2, \dots, u_{\ell+i})$, где $i = 0, 1, 2, \dots$.

Через $NPL(n)$ обозначим множество всех разбиений натурального числа n. Пусть $u = (u_1, \dots, u_t)$ – разбиение числа n, где $u_1 \geqslant \dots \geqslant u_t \geqslant 0$ и существуют числа $i, j \in \{1, 2, \dots, t\}$ такие, что

$$i < j, \quad u_i - 1 \geqslant u_{i+1}, \quad u_{j-1} \geqslant u_j + 1 \quad \text{и} \quad u_i = u_j + \delta, \quad \text{где} \quad \delta \geqslant 2.$$

Будем говорить, что разбиение $v = (u_1, \dots, u_i - 1, \dots, u_j + 1, \dots, u_t)$ получено *элементарным преобразованием* разбиения u. Такое преобразование сводится к «перемещению» одной единицы из i-й компоненты u в j-ю компоненту. Введем отношение $\geqslant$ на множестве $NPL(n)$, полагая $u \geqslant v$ для $u, v \in NPL(n)$, если v можно получить из u с помощью последовательного выполнения конечного числа элементарных преобразований. Очевидно, отношение $\geqslant$ есть отношение частичного порядка.

Элементарное преобразование разбиения числа n будем называть *падением блока* при

$$j = i + 1$$

и *сдвигом блока*, если

$$i + 1 < j, \quad u_i = u_{i+1} + 1, \quad u_{i+1} = u_{i+2} =:= u_{j-1} \quad \text{и} \quad u_{j-1} = u_j + 1.$$

Для удобства падение блока при $\delta = 2$ также будем называть сдвигом блока. Если разбиение v получается из разбиения u падением или сдвигом блока, то будем писать $u \Rightarrow v$.

Говорят, что элемент u *покрывает* элемент v относительно порядка $\leqslant$, если $u > v$ и не существует такого w, что $u > w > v$. Нетрудно доказать, что разбиение u покрывает разбиение v в $NPL(n)$ относительно введенного порядка $\leqslant$ тогда и только тогда, когда $u \Rightarrow v$.

Пусть даны два разбиения $u = (u_1, \dots, u_t), v = (v_1, \dots, v_t) \in NPL(n)$, где t – наибольшая из длин u и v. Укажем алгоритм вычисления вспомогательной последовательности $w = w(u, v) = (w_1, w_2, \dots)$.

Алгоритм. Полагаем $\Delta_0(u) = 0$ и $\Delta_0(v) = 0$ (это начальные *запасы* для разбиений u и v).

Для $i = 1, 2, \ldots$ выполняем следующие действия до тех пор, пока не получим число w_i, равное 0. Полагаем $w_i = min\{u_i + \Delta_{i-1}(u), v_i + \Delta_{i-1}(v)\}$ и определяем величины запасов для u и v после i-го этапа:

$$\Delta_i(u) = u_i + \Delta_{i-1}(u) - w_i \geqslant 0,$$
$$\Delta_i(v) = v_i + \Delta_{i-1}(v) - w_i \geqslant 0.$$

Легко заметить, что при работе алгоритма на каждом из этапов один из запасов равен 0.

Пример. Пусть $n = 46$, $u = (12, 9, 6, 6, 6, 5, 2)$, $v = (11, 11, 9, 4, 3, 3, 3, 2)$.

$\Delta =$	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*	*3*	*2*	*0*
$u =$	12	9	6	6	6	5	2	0	0
$v =$	11	11	9	4	3	3	3	2	0
$\Delta =$	*0*	*0*	*1*	*4*	*2*	*0*	*0*	*0*	*0*
$w =$	11	10	6	6	5	3	3	2	0

Нетрудно убедиться, что $w = w(u, v)$ является точной нижней гранью элементов u, v в $NPL(n)$ относительно частичного порядка $\leqslant$. Поскольку в $NPL(n)$ есть наибольший элемент (а именно тривиальное разбиение $(n, 0, \ldots)$), отсюда следует, что $NPL(n)$ является решеткой относительно $\leqslant$.

Пусть n, t – фиксированные натуральные числа такие, что $t \leqslant n$. Через $NPL(n, t)$ обозначим множество всех разбиений числа n длины t. Из устройства пересечения элементов в решетке $NPL(n)$ и устройства порядка $\leqslant$ легко следует, что $NPL(n, t)$ является подрешеткой решетки $NPL(n)$.

Разделим n на t с остатком: $n = t \cdot q + r$, где $0 \leqslant r < t$. Рассмотрим разбиение $u = (q + 1, \ldots, q + 1, q, \ldots, q) \in NPL(n, t)$, где компонента $q + 1$ повторяется в u точно r раз. Очевидно, разбиение $(n - t + 1, 1, \ldots, 1)$ числа n является наибольшим элементом решетки $NPL(n, t)$, а разбиение u – ее наименьшим элементом.

Пусть $n = n_1 + \cdots + n_t$, где $n_1 \geqslant \ldots \geqslant n_t \geqslant 1$ – разбиение числа n. Через $K(n_1, \ldots, n_t)$ будем обозначать полный t-дольный граф на n вершинах с долями размеров $n_1, \ldots, n_t$. Ясно, что с точностью до изоморфизма существует взаимно однозначное соответствие между полными t-дольными графами на n вершинах и элементами решетки $NPL(n, t)$. Поэтому порядок $\leqslant$ на $NPL(n, t)$ индуцирует отвечающий ему порядок на множестве таких графов. Далее мы активно будем использовать этот порядок на графах.

Зафиксируем элементарное преобразование разбиений из $NPL(n,t)$:

$$u = (n_1, \dots, n_i, \dots, n_j, \dots, n_t) \;\Rightarrow\; v = (n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_j + 1, \dots, n_t),$$

где $i < j$, $n_i = n_j + \delta$ и $\delta \geqslant 2$.

Для графа $K(n_1, \dots, n_t)$ хроматический инвариант I_2 кратко будем записывать в виде $I_2(u)$. Аналогично мы будем поступать и для других хроматических инвариантов.

Лемма 1. $I_2(u) - I_2(v) = -(\delta - 1)$.

Доказательство. Очевидно, $I_2(u) = \binom{n}{2} - \binom{n_1}{2} - \dots - \binom{n_t}{2}$. В силу этого получаем

$$\begin{aligned} I_2(u) - I_2(v) &= -\binom{n_i}{2} - \binom{n_j}{2} + \binom{n_i - 1}{2} + \binom{n_j + 1}{2} = \\ &= -(n_i - 1) + n_j = -\delta + 1 = -(\delta - 1). \end{aligned}$$

Перейдем теперь к рассмотрению полных трехдольных графов, т. е. будем считать, что $t = 3$.

При $t = 3$ рассмотрим три случая: $\swarrow$) $i = 1$, $j = 2$, $\searrow$) $i = 2$, $j = 3$ и $\downarrow$) $i = 1$, $j = 3$.

Лемма 2. *Пусть* $t = 3$. *Тогда в случаях* $\swarrow$), $\searrow$) *и* $\downarrow$) *выполняется*

$\swarrow$) $I_3(u) - I_3(v) = -(\delta - 1)n_3$,

$\searrow$) $I_3(u) - I_3(v) = -(\delta - 1)n_1$,

$\downarrow$) $I_3(u) - I_3(v) = -(\delta - 1)n_2$.

Доказательство. $\swarrow$) Имеем

$$\begin{aligned} I_3(u) - I_3(v) &= n_1 n_2 n_3 - (n_1 - 1)(n_2 + 1)n_3 = (n_1 n_2 - n_1 n_2 - n_1 + n_2 + 1)n_3 = \\ &= (-\delta + 1)n_3 = -(\delta - 1)n_3. \end{aligned}$$

Случаи $\searrow$) и $\downarrow$) рассматриваются аналогично.

Заметим, что при $t = 3$ граф $K(n_1, n_2, n_3)$ не содержит подграфов K_4 и поэтому $I_4(u) = vg\,\square\,(K(n_1, n_2, n_3))$.

Лемма 3. *Пусть* $t = 3$. *Тогда в случаях* $\swarrow$), $\searrow$) *и* $\downarrow$) *выполняется*

$\swarrow$) $I_4(u) - I_4(v) = -(\delta - 1)\left[\frac{(n_1 - 1)n_2}{2} - \binom{n_3}{2}\right]$,

$\searrow$) $I_4(u) - I_4(v) = -(\delta - 1)\left[\frac{(n_2 - 1)n_3}{2} - \binom{n_1}{2}\right]$,

$\downarrow$) $I_4(u) - I_4(v) = -(\delta - 1)\left[\frac{(n_1 - 1)n_3}{2} - \binom{n_2}{2}\right]$.

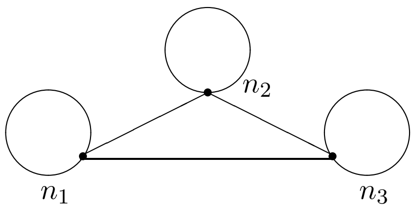
Доказательство. $\swarrow$) Имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned}
I_4(u) - I_4(v) &= \binom{n_1}{2}\binom{n_2}{2} + \binom{n_2}{2}\binom{n_3}{2} + \binom{n_3}{2}\binom{n_1}{2} - \\
&- \binom{n_1-1}{2}\binom{n_2+1}{2} - \binom{n_2+1}{2}\binom{n_3}{2} - \binom{n_3}{2}\binom{n_1-1}{2} = \\
&= \binom{n_1}{2}\binom{n_2}{2} - \binom{n_1-1}{2}\binom{n_2+1}{2} + \\
&+ \binom{n_3}{2} \times \left[\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} - \binom{n_1-1}{2} - \binom{n_2+1}{2}\right] = \\
&= (n_1-1)\binom{n_2}{2} - \binom{n_1-1}{2}n_2 + \binom{n_3}{2}[n_1 - 1 - n_2] = \\
&= \frac{(n_1-1)n_2}{2}(n_2 - 1 - n_1 + 2) + \binom{n_3}{2}(\delta - 1) = \\
&= -(\delta - 1)\left[\frac{(n_1-1)n_2}{2} - \binom{n_3}{2}\right].
\end{aligned}$$

Случаи $\searrow$) и $\downarrow$) рассматриваются аналогично.

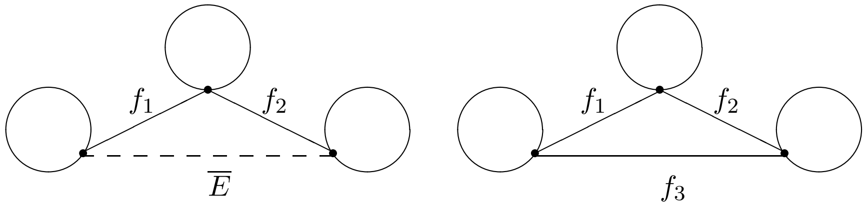
Пусть граф H получен из графа $K(n_1, n_2, n_3)$ удалением непустого семейства ребер E, т. е. $H = K(n_1, n_2, n_3) - E$.

Выясним, как изменяется инвариант I_3 при переходе от $K(n_1, n_2, n_3)$ к H. Любой треугольник в $K(n_1, n_2, n_3)$ устроен следующим образом: он имеет по одной вершине из каждой доли этого графа.



Обозначим через X число треугольников, разрушающихся при удалении E, а через $\xi_1(f)$ – число треугольников в $K(n_1, n_2, n_3)$, содержащих заданное ребро $f \in E$. Положим $\xi_1 = \sum_{f \in E} \xi_1(f)$.

Через ξ_2 обозначим число треугольников в $K(n_1, n_2, n_3)$, содержащих два смежных ребра из E и одно ребро, не принадлежащее E, а через ξ_3 – число треугольников в E.

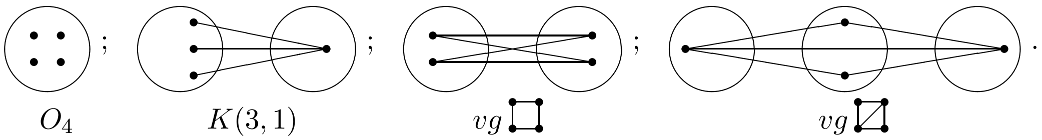


Очевидно, $X = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3$, поэтому $I_3(H) = I_3(K(n_1, n_2, n_3)) - X = I_3(K(n_1, n_2, n_3)) - \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3$, т. е.

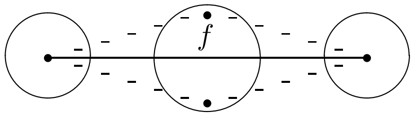
$$I_3(H) = I_3(n_1, n_2, n_3) - \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3.$$

Выясним, как изменяется инвариант I_4 при переходе от $K(n_1, n_2, n_3)$ к H.

Отметим сначала, что в $K(n_1, n_2, n_3)$ любой 4-подграф имеет один из следующих типов:



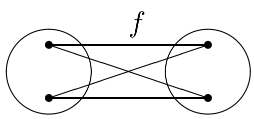
Рассмотрим, сколько возникает новых подграфов вида vg при удалении E из $K(n_1, n_2, n_3)$. Такие подграфы возникают при отбрасывании ребра $f \in E$ в подграфе вида



где остальные четыре ребра рассматриваемого подграфа не лежат в E. Обозначим число таких подграфов через η.

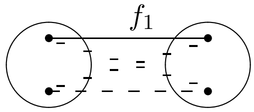
Теперь рассмотрим, сколько подграфов вида vg разрушается при переходе от $K(n_1, n_2, n_3)$ к H.

Далее, через $\eta_1(f)$, где $f \in E$, обозначим число подграфов вида vg в $K(n_1, n_2, n_3)$, содержащих f. Положим $\eta_1 = \sum_{f \in E} \eta_1(f)$.

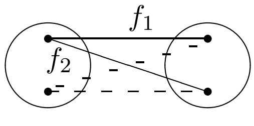


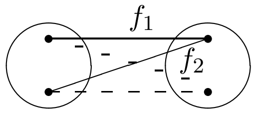
Посмотрим, сколько раз разрушается каждый из бесхордных 4-циклов вида vg из $K(n_1, n_2, n_3)$.

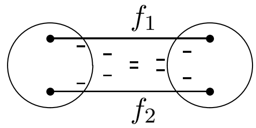
1) Цикл, содержащий точно одно ребро из E, разрушается один раз.



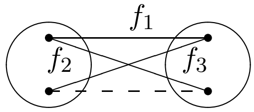
2) Цикл, содержащий точно два ребра из E, разрушается дважды, т. е. каждым из двух ребер. Число таких подграфов vg обозначим через η_2. Они имеют один из следующих типов:



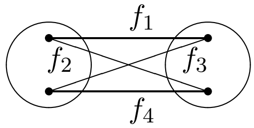




3) Цикл, содержащий точно три ребра из E, разрушается трижды. Число таких подграфов vg обозначим через η_3. Они имеют следующий вид:



4) Цикл, содержащий точно четыре ребра из E, разрушается четыре раза. Число таких подграфов vg из $K(n_1, n_2, n_3)$ обозначим через η_4.



Ясно, что $\eta - \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4$ – это число, на которое меняется число подграфов вида vg при переходе от $K(n_1, n_2, n_3)$ к $H = K(n_1, n_2, n_3) - E$. Таким образом,

$$I_4(H) = I_4(n_1, n_2, n_3) + \eta - \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4.$$

Будем считать далее, что $n = 3 \cdot q$, т. е. $t = 3$ и $r = 0$. Легко видеть, что нижние этажи решетки $NPL(n,3)$ устроены следующим образом:

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
(q+3,q+2,q-5) \arrow[dr, Rightarrow, "6"'] & & (q+4,q,q-4) \arrow[dl, Rightarrow, "3"] \arrow[dr, Rightarrow, "3"'] & & (q+5,q-2,q-3) \arrow[dl, Rightarrow, "6"] \\
& (q+3,q+1,q-4) \arrow[dl, Rightarrow, "1"] \arrow[dr, Rightarrow, "4"'] & & (q+4,q-1,q-3) \arrow[dl, Rightarrow, "4"] \arrow[dr, Rightarrow, "1"'] & \\
(q+2,q+2,q-4) \arrow[dr, Rightarrow, "5"'] & & (q+3,q,q-3) \arrow[dl, Rightarrow, "2"] \arrow[dr, Rightarrow, "2"'] & & (q+4,q-2,q-2) \arrow[dl, Rightarrow, "5"] \\
& (q+2,q+1,q-3) \arrow[dr, Rightarrow, "3"'] & & (q+3,q-1,q-2) \arrow[dl, Rightarrow, "3"] & \\
& & (q+2,q,q-2) \arrow[dl, Rightarrow, "1"] \arrow[dr, Rightarrow, "1"'] & & \\
& (q+1,q+1,q-2) \arrow[dr, Rightarrow, "2"'] & & (q+2,q-1,q-1) \arrow[dl, Rightarrow, "2"] & \\
& & (q+1,q,q-1) \arrow[d, Rightarrow, "1"'] & & \\
& & (q,q,q) & &
\end{tikzcd}$$

На этом рисунке рядом с отношением покрытия указано отвечающее ему значение $\delta - 1$.

Лемма 4. 1) $I_4(q+2,q,q-2) - I_4(q+2,q-1,q-1) = 3q$.
2) $I_4(q+2,q,q-2) - I_4(q+1,q+1,q-2) = -3q+3$.
3) $I_4(q+2,q-1,q-1) - I_4(q+1,q,q-1) = -3q+3$.
4) $I_4(q+1,q+1,q-2) - I_4(q+1,q,q-1) = 3q$.
5) $I_4(q+1,q,q-1) - I_4(q,q,q) = 0$.

Доказательство проводится простыми вычислениями в соответствии с леммой 3.

Лемма 5. *Пусть* $u = (q+\alpha_1, q+\alpha_2, q+\alpha_3)$ *и* $v = (q+\beta_1, q+\beta_2, q+\beta_3)$ *– произвольные элементы из* $NPL(n,3)$ *такие, что*

$$q+\alpha_1 > q+\beta_1 \quad \text{и} \quad q+\alpha_3 < q+\beta_3,$$

где α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 *– целые числа. Тогда* $u \geqslant v$.

Доказательство. Применим алгоритм вычисления $u \wedge v$. Очевидно, что $u \wedge v = (q+\beta_1, x, q+\beta_3)$ для некоторого натурального числа x. Поскольку $u \wedge v$ – разбиение числа n, отсюда имеем $x = q+\beta_2$, т. е. $u \wedge v = v$. Следовательно, $u \geqslant v$.

Лемма 6. *Пусть u и v – произвольные несравнимые элементы в $NPL(n,3)$. Тогда $I_2(u) \neq I_2(v)$ или $I_3(u) \neq I_3(v)$.*

Доказательство. Ясно, что найдутся целые числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ такие, что $u = (q+\alpha_1, q+\alpha_2, q+\alpha_3)$ и $v = (q+\beta_1, q+\beta_2, q+\beta_3)$. Если $q+\alpha_1 = q+\beta_1$, то легко понять, что u и v сравнимы. Без ограничения общности будем считать, что $q+\alpha_1 > q+\beta_1$. Если $q+\alpha_3 = q+\beta_3$, то u и v сравнимы. Поэтому имеем $q+\alpha_3 \neq q+\beta_3$. В силу леммы 5 $q+\alpha_3 > q+\beta_3$. Используя алгоритм вычисления пересечения, получаем $u \wedge v = (q+\beta_1, x, q+\alpha_3)$ для некоторого натурального числа x.

Тогда от u до $u \wedge v$ имеется цепочка элементарных преобразований, осуществляющих падение блока с первой компоненты на вторую. Обозначим через ℓ_1 сумму всех значений $\delta - 1$, отвечающих этим преобразованиям. Аналогично, имеется цепочка элементарных преобразований от v до $u \wedge v$, осуществляющих падение блока со второй компоненты на третью. Обозначим через ℓ_2 сумму всех значений $\delta - 1$, отвечающих этим преобразованиям. Тогда $I_2(u) - I_2(u \wedge v) = -\ell_1$ и $I_2(v) - I_2(u \wedge v) = -\ell_2$ на основании леммы 1.

Пусть выполняется равенство $I_2(u) = I_2(v)$. Тогда $\ell_1 = \ell_2$. В силу леммы 3 имеем

$$I_3(u) - I_3(u \wedge v) = -\ell_1(q+\alpha_3),$$
$$I_3(v) - I_3(u \wedge v) = -\ell_2(q+\beta_1).$$

Пусть, от противного, $I_3(u) = I_3(v)$. Тогда $q+\alpha_3 = q+\beta_1$, т. е. $\alpha_3 = \beta_1$. Последнее равенство невозможно, так как $\beta_1 > 0$ и $\alpha_3 < 0$.

Предложение 1. *Любые два различных полных трехдольных n-графа не являются хроматически эквивалентными.*

Доказательство. Учитывая лемму 6, достаточно заметить, что в силу леммы 1 в $NPL(n,3)$ из условия $u > v$ следует $I_2(u) < I_2(v)$.

Пусть

$$G = K(q+\alpha_1, q+\alpha_2, q+\alpha_3), \qquad n = q+\alpha_1+q+\alpha_2+q+\alpha_3,$$
$$u = (q+\alpha_1, q+\alpha_2, q+\alpha_3),$$

где α_1, α_2, α_3 – некоторые целые числа. В дальнейшем при доказательстве χ-определяемости графа G при некоторых значениях $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ мы всегда будем рассматривать некоторый χ-эквивалентный ему граф H и от противного предполагать, что H неизоморфен G.

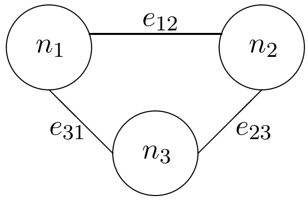
Такой граф H обязан быть 3-хроматическим графом. Рассмотрим его 3-раскраску с долями размера n_1, n_2, n_3, где $n_1 \geqslant n_2 \geqslant n_3$ и $n = n_1+n_2+n_3$.

В силу предложения 1 имеем $H = K(n_1, n_2, n_3) - E$ для некоторого непустого множества ребер E графа $K(n_1, n_2, n_3)$. Ясно, что

$$I_2(G) = I_2(H) = I_2(n_1, n_2, n_3) - |E|,$$

т. е. $I_2(n_1, n_2, n_3) = I_2(G) + |E|$. Следовательно, в графе $K(n_1, n_2, n_3)$ ребер больше, чем в G точно на $|E|$.

Положим $v = (n_1, n_2, n_3) = (q + \beta_1, q + \beta_2, q + \beta_3)$ для некоторых целых чисел β_1, β_2, β_3 и $|E| = e$. Через E_{ij} для $i, j = 1, 2, 3$ обозначим множество ребер из E, соединяющих вершину из i-й компоненты с вершиной из j-й компоненты. Тогда $E = E_{12} \dot{\cup} E_{23} \dot{\cup} E_{31}$, где объединяемые множества попарно не пересекаются. Положим $e_{12} = |E_{12}|$, $e_{23} = |E_{23}|$, $e_{31} = |E_{31}|$. Ясно, что $e = e_{12} + e_{23} + e_{31}$.



Используя ранее введенные обозначения, имеем $I_3(u) = I_3(v) - \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3$, т. е.

$$\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = -(I_3(u) - I_3(v)).$$

Аналогично имеем $I_4(u) = I_4(v) + \eta - \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4$, т. е.

$$\eta - \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 = I_4(u) - I_4(v).$$

Предложение 2. *Граф $G = K(q, q, q)$ является χ-определяемым при $q \geqslant 1$.*

Доказательство. Для графа H в данном случае в силу леммы 1 выполняется $I_2(n_1, n_2, n_3) < I_2(q, q, q)$, так как $(n_1, n_2, n_3) > (q, q, q)$. С другой стороны, $I_2(n_1, n_2, n_3) = I_2(G) + |E|$, что противоречиво.

2. Основные результаты

Предложение 3. *Граф $G = K(q + 1, q, q - 1)$ является χ-определяемым при $q \geqslant 3$.*

Доказательство. Для графа H в данном случае имеем $v = (q, q, q)$ и $e = 1$. Ясно, что $\xi_2 = \xi_3 = 0$ и $\xi_1 = -(I_3(u) - I_3(v)) = q$ в силу леммы 2. Поскольку

$\xi_1 = e_{12}q + e_{23}q + e_{31}q$, пусть $e_{12} = 1$, $e_{23} = e_{31} = 0$, так как e_{12}, e_{23}, e_{31} играют симметричную роль. Тогда $\eta = \binom{q}{2}$, $\eta_1 = (q-1)\cdot(q-1)$, $\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0$, поэтому с учетом леммы 4 имеем

$$\binom{q}{2} - (q-1)^2 = \eta - \eta_1 = I_4(u) - I_4(v) = 0.$$

Следовательно, $q^2 - 3q + 2 = 0$, т. е. $q = 1$ или $q = 2$, что невозможно.

Предложение 4. *Граф $G = K(q+1, q+1, q-2)$ является χ-определяемым при $q \geqslant 4$.*

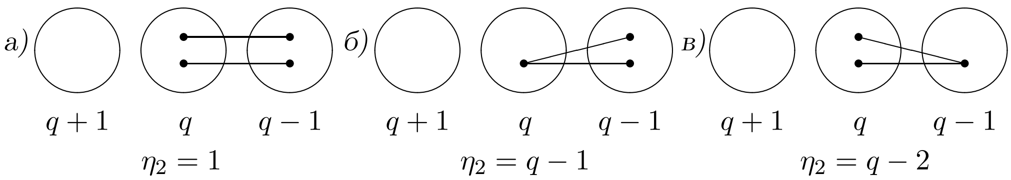
Доказательство. Для графа H в данном случае выполняется

$$v = (q+1, q, q-1) \text{ или } v = (q, q, q).$$

1-й случай. Пусть $v = (q+1, q, q-1)$. Тогда $e = 2$, $\xi_2 \leqslant 1$ и $\xi_3 = 0$, поэтому $\xi_1 - \xi_2 = -(I_3(u) - I_3(v)) = 2(q+1)$. Очевидно, $\xi_1 = e_{12}(q-1) + e_{23}(q+1) + e_{31}q$. Если $e_{12} \neq 0$ или $e_{31} \neq 0$, то, в силу условия $2 = e_{12} + e_{23} + e_{31}$, получаем $\xi_1 < 2(q+1)$, поэтому $\xi_1 - \xi_2 < 2(q+1)$, что противоречиво. Таким образом, $e_{23} = 2$ и $e_{12} = e_{31} = 0$ и $\xi_2 = 0$. Тогда $\eta = 2\binom{q+1}{2}$, $\eta_1 = 2(q-1)\cdot(q-2)$ и $\eta_3 = \eta_4 = 0$. Получаем

$$\eta_2 = I_4(u) - I_4(v) - \eta + \eta_1 = 3q - 2\binom{q+1}{2} + 2(q-1)(q-2) = q^2 - 4q + 4.$$

Рассмотрим три возможных случая и подсчитаем в каждом из них η_2:



В любом из случаев выполняется $\eta_2 < q$. Поэтому $q^2 - 4q + 4 < q$, $q^2 - 5q + 4 < 0$, т. е. $1 < q < 4$, что противоречиво.

2-й случай. Пусть $v = (q, q, q)$. Тогда $e = 2 + 1 = 3$, $\xi_2 \leqslant 2$, $\xi_3 \leqslant 1$ и

$$\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = -(I_3(u) - I_3(v)) = -(-2(q+1) - 1\cdot q) = 3q + 2.$$

Заметим, что для любых значений e_{12}, e_{23}, e_{31} таких, что $e_{12} + e_{23} + e_{31} = 3$, выполняется $\xi_1 = 3q$, т. е. $\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 > 3q = \xi_1$, противоречие.

Предложение 5. *Граф $G = K(q+2, q-1, q-1)$ является χ-определяемым при $q \geqslant 3$.*

Доказательство. Для графа H в данном случае выполняется

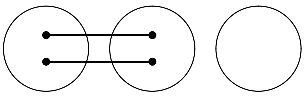
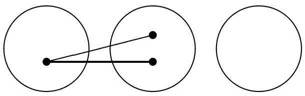
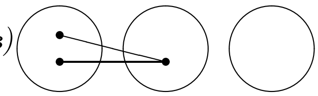
$$v = (q+1, q, q-1) \text{ или } v = (q, q, q).$$

1-й случай. Пусть $v = (q+1, q, q-1)$. Тогда $e = 2$, $\xi_2 \leqslant 1$ и $\xi_3 = 0$, поэтому $\xi_1 - \xi_2 = -(I_3(u) - I_3(v)) = 2(q-1)$. Очевидно, $\xi_1 = e_{12}(q-1) + e_{23}(q+1) + e_{31}q$. Если $e_{23} \neq 0$, то, в силу условий $2 = e_{12} + e_{23} + e_{31}$ и $\xi_2 \leqslant 1$, получаем $\xi_1 - \xi_2 > 2(q-1)$, что противоречиво. Таким образом, $e_{23} = 0$. Тогда имеем $\xi_1 - \xi_2 = e_{12}(q-1) + e_{31}q - \xi_2$, т. е. возможны два подслучая.

1.1. Пусть $e_{12} = 2$ и $e_{12} = e_{31} = 0$. В этом случае $\xi_2 = 0$ и $\xi_1 = 2(q-1)$. Тогда $\eta = 2\binom{q-1}{2}$, $\eta_1 = 2q(q-1)$ и $\eta_3 = \eta_4 = 0$. Получаем

$$\eta_2 = I_4(u) - I_4(v) - \eta + \eta_1 = -3q + 3 - 2\binom{q-1}{2} + 2q(q-1) = q^2 - 2q + 1.$$

Рассмотрим три возможных случая и подсчитаем в каждом из них η_2:

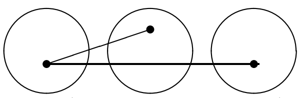
а)  б)  в) 

$q+1$ q $q-1$ $q+1$ q $q-1$ $q+1$ q $q-1$

$\eta_2 = 1$ $\eta_2 = q$ $\eta_2 = q-1$

В любом из случаев выполняется $\eta_2 < q+1$. Поэтому $q^2 - 2q + 1 < q + 1$, $q^2 - 3q < 0$, т. е. $0 < q < 3$, что противоречиво.

1.2. Пусть $e_{12} = e_{31} = 1$ и $e_{23} = 0$. В этом случае $\xi_1 = (q-1) + q = 2q - 1$, поэтому $2q - 1 - \xi_2 = 2q - 2$, т. е. $\xi_2 = 1$. Следовательно, ребра из E имеют вид



$q+1$ q $q-1$

Тогда $\eta = \binom{q-2}{2} + \binom{q-1}{2} = (q-2)^2$, $\eta_1 = q(q-1) + q(q-2)$, $\eta_2 = 0$, откуда получаем $-3q + 3 = \eta - \eta_1 = (q-2)^2 - q(2q-3)$. Следовательно, $q^2 - 2q - 1 = 0$, т. е. $q = 1 \pm \sqrt{2}$, что невозможно, так как q – целое число.

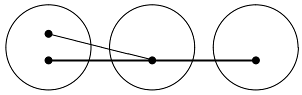
2-й случай. Пусть $v = (q, q, q)$. Тогда $e = 2 + 1 = 3$, $\xi_2 \leqslant 2$, $\xi_3 \leqslant 1$ и $\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = -(I_3(u) - I_3(v)) = -(-2(q-1) - q) = 3q - 2$. Очевидно, $\xi_1 = e_{12}q + e_{23}q + e_{31}q = (e_{12} + e_{23} + e_{31})q = 3q$, следовательно, $\xi_2 - 2\xi_3 = 2$.

Случаи	e_{12}	e_{23}	e_{31}
1	3	0	0
2	2	1	0
3	1	1	1

Заметим, что e_{12}, e_{23}, e_{31} играют симметричную роль, поэтому проведем классификацию случаев по e_{12}.

2.1. Пусть $e_{12} = 3$ и $e_{12} = e_{31} = 0$. В этом случае $\xi_2 = \xi_3 = 0$ и $\xi_1 = 3q$. Тогда $3q - 2 = \xi_1 = 3q$, противоречие.

2.2. Пусть $e_{12} = 2$, $e_{23} = 1$ и $e_{31} = 0$. В этом случае $\xi_3 = 0$ и $\xi_1 = 3q$, откуда $\xi_2 = 2$. Следовательно, ребра из E имеют вид



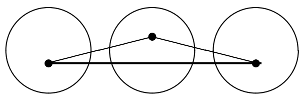
Тогда $\eta = 2\binom{q-1}{2} + \binom{q-2}{2} = \frac{1}{2}(3q^2 - 11q + 10)$, $\eta_1 = 3(q-1)^2$, $\eta_2 = q - 1$ и $\eta_3 = \eta_4 = 0$, получаем

$$-3q + 3 = I_4(u) - I_4(v) = \eta - \eta_1 + \eta_2 =$$
$$= \frac{1}{2}(3q^2 - 11q + 10) - (3q^2 - 6q + 3) + (q - 1),$$
$$3q^2 - 9q + 4 = 0 \quad \text{и} \quad q = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{6},$$

что невозможно, так как q – целое число.

2.3. Пусть $e_{12} = e_{23} = e_{31} = 1$. В этом случае $\xi_1 = 3q$ и $\xi_2 + 2\xi_3 = 2$. Из последнего равенства следует, что ξ_2 четно и либо $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 1$, либо $\xi_2 = 2$, $\xi_3 = 0$.

2.3.1. Пусть $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 1$. Следовательно, ребра из E имеют вид

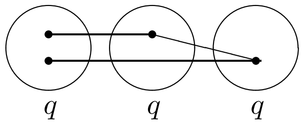


Тогда $\eta = 3\binom{q-1}{2}$, $\eta_1 = 3(q-1)^2$, $\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0$, получаем

$$-3q + 3 = I_4(u) - I_4(v) = \eta - \eta_1 = \frac{3}{2}(q^2 - 3q + 2) - (3q^2 - 6q + 3),$$
$$q^2 - 3q + 2 = 0 \quad \text{и} \quad \text{q=1}, \quad q = 2,$$

что противоречиво.

2.3.2. Пусть $\xi_2 = 2$, $\xi_3 = 0$. Тогда в силу симметрии можно считать, что ребра из E имеют вид



Получаем

$$\eta = \binom{q-1}{2} + \binom{q-2}{2} + \binom{q-1}{2}, \quad \eta_1 = 3(q-1)^2, \quad \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0,$$

и далее

$$-3q + 3 = I_4(u) - I_4(v) = \eta - \eta_1 = \frac{1}{2}(3q^2 - 11q + 10) - (3q^2 - 6q + 3),$$

$$3q^2 - 7q + 2 = 0 \quad \text{и} \quad q = \frac{1}{3}, \quad q = 2,$$

что противоречиво.

Предложение 6. *Граф $G = K(q+2, q, q-2)$ является χ-определяемым при $q \geqslant 4$.*

Доказательство. Для графа H в данном случае разбиение v может совпадать с одним из следующих разбиений: $(q+2, q-1, q-1)$, $(q+1, q+1, q-2)$, $(q+1, q, q-1)$, (q, q, q).

1-й случай. Пусть $v = (q+2, q-1, q-1)$. Тогда $e = 1$, $\xi_2 = \xi_3 = 0$, поэтому $\xi_1 = -(I_3(u) - I_3(v)) = q+2$. Поскольку $\xi_1 = e_{12}(q-1) + e_{23}(q+2) + e_{31}(q-1)$, отсюда вытекает $e_{23} = 1$ и $e_{12} = e_{31} = 0$. Тогда $\eta = \binom{q+2}{2}$, $\eta_1 = (q-2)^2$, $\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0$, поэтому

$$3q = I_4(u) - I_4(v) = \eta - \eta_1 = \frac{1}{2}(q^2 + 3q + 2) - (q^2 - 4q + 4).$$

Следовательно, $q^2 - 5q + 6 = 0$, $q = 2$ или $q = 3$, что невозможно.

2-й случай. Пусть $v = (q+1, q+1, q-2)$. Тогда $e = 1$, $\xi_2 = \xi_3 = 0$, поэтому $\xi_1 = -(I_3(u) - I_3(v)) = q - 2$. Поскольку

$$\xi_1 = e_{12}(q-2) + e_{23}(q+1) + e_{31}(q+1),$$

отсюда вытекает $e_{12} = 1$ и $e_{23} = e_{31} = 0$. Тогда $\eta = \binom{q-2}{2}$, $\eta_1 = q^2$, $\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0$, поэтому $-3q+3 = I_4(u) - I_4(v) = \eta - \eta_1 = \frac{1}{2}(q^2 - 5q + 6) - q^2$. Следовательно, $q^2 - q = 0$, $q = 0$ или $q = 1$, что невозможно.

3-й случай. Пусть $v=(q+1,q,q-1)$. Тогда $e=2+1=3$, $\xi_2\leqslant 2$, $\xi_3\leqslant 1$ и

$$\xi_1-\xi_2-2\xi_3=-(I_3(u)-I_3(v))=-(-(q+2)-2(q-1))=3q.$$

Очевидно, $\xi_1=e_{12}(q-1)+e_{23}(q+1)+e_{31}q$.

Кроме того, поскольку $\eta_4=0$, имеем

$$\eta-\eta_1+\eta_2+2\eta_3=I_4(u)-I_4(v)=3q-3q+3=3.$$

Проведем классификацию возможных случаев.

Случаи	e_{12}	e_{23}	e_{31}	$\xi_1-\xi_2-2\xi_3$
1	3	0	0	$3(q-1)-0-0=3q-3$
2	2	1	0	$2(q-1)+(q+1)-\xi_2-0=3q-1-\xi_2$
3	2	0	1	$2(q-1)+q-\xi_2-0=3q-2-\xi_2$
4	1	2	0	$(q-1)+2(q+1)-\xi_2-0=3q+1-\xi_2$
5	1	1	1	$(q-1)+(q+1)+q-\xi_2-2\xi_3=3q-\xi_2-2\xi_3$
6	1	0	2	$(q-1)+2q-\xi_2-0=3q-1-\xi_2$
7	0	3	0	$3(q+1)-0-0=3q+3$
8	0	2	1	$2(q+1)+q-\xi_2-0=3q+2-\xi_2$
9	0	1	2	$(q+1)+2q-\xi_2-0=3q+1-\xi_2$
10	0	0	3	$3q-0-0=3q$

Рассмотрим десять возможных подслучаев.

3.1. Пусть $e_{12}=3$ и $e_{23}=e_{31}=0$. В этом случае $\xi_2=\xi_3=0$ и $3q=\xi_1=3q-3$, что невозможно.

3.2. Пусть $e_{12}=2$, $e_{23}=1$ и $e_{31}=0$. В этом случае $\xi_3=0$ и $3q=3q-1-\xi_2$, что невозможно.

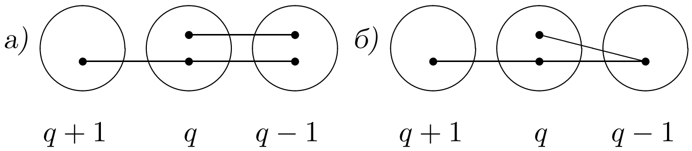
3.3. Пусть $e_{12}=2$, $e_{23}=0$ и $e_{31}=1$. В этом случае $\xi_3=0$ и $3q=3q-2-\xi_2$, что невозможно.

3.4. Пусть $e_{12}=1$, $e_{23}=2$ и $e_{31}=0$. В этом случае $\xi_3=0$ и $3q=3q+1-\xi_2$, поэтому $\xi_2=1$. Тогда $\eta=\binom{q-2}{2}+\binom{q}{2}+\binom{q+1}{2}=\frac{1}{2}(3q^2-5q+6)$, так как, в силу $\xi_2=1$, одно ребро из E_{12} смежно точно одному ребру E_{23},

$$\eta_1=q(q-1)+2(q-1)(q-2)=3q^2-7q+4,\quad \eta_3=\eta_4=0$$

и $$\eta_2=3-\eta+\eta_1=3-\frac{1}{2}(3q^2-5q+6)+3q^2-7q+4=\frac{1}{2}(3q^2-9q+8).$$

Рассмотрим два возможных случая и в каждом подсчитаем η_2:



$\eta_2 = 1$ $\qquad\qquad$ $\eta_2 = q-2$

В обоих случаях $\eta_2 < q-1$, поэтому $\frac{1}{2}(3q^2-9q+8) < q-1$, $3q^2-11q+10<0$. Отсюда следует $\frac{5}{3} < q < 2$, что противоречиво.

3.5. Пусть $e_{12} = e_{23} = e_{31} = 1$. В этом случае $3q = 3q - \xi_2 - 2\xi_3$, поэтому $\xi_2 = \xi_3 = 0$. Тогда

$$\eta = \binom{q-1}{2} + \binom{q+1}{2} + \binom{q}{2} = \frac{1}{2}(3q^2 - 3q + 2),$$

$$\eta_1 = q(q-1) + (q-1)(q-2) + q(q-2) = 3q^2 - 6q + 2, \quad \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0$$

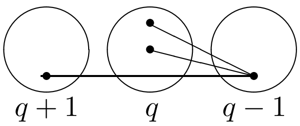
$$\text{и} \;\; 3 = I_4(u) - I_4(v) = \eta - \eta_1 = \frac{1}{2}(3q^2 - 3q + 2) - (3q^2 - 6q + 2).$$

Следовательно, $3q^2 - 9q + 8 = 0$, $D = 81 - 4\cdot 3\cdot 8 = 81 - 96 < 0$, противоречие.

3.6. Пусть $e_{12} = 1$, $e_{23} = 0$ и $e_{31} = 2$. В этом случае $\xi_3 = 0$ и $3q = 3q - 1 - \xi_2$, что невозможно.

3.7. Пусть $e_{12} = 0$, $e_{23} = 3$ и $e_{31} = 0$. В этом случае $\xi_2 = \xi_3 = 0$ и $3q = 3q + 3$, что невозможно.

3.8. Пусть $e_{12} = 0$, $e_{23} = 2$ и $e_{31} = 1$. В этом случае $\xi_3 = 0$ и $3q = 3q + 2 - \xi_2$, откуда $\xi_2 = 2$. Тогда ребра из E имеют вид



Получаем

$$\eta = 2\binom{q}{2} + \binom{q-2}{2} = \frac{1}{2}(3q^2 - 7q + 6),$$

$$\eta_1 = 2(q-1)(q-2) + q(q-2) = 3q^2 - 8q + 4, \quad \eta_2 = q - 2, \quad \eta_3 = \eta_4 = 0.$$

Следовательно,

$$3 = I_4(u) - I_4(v) = \eta - \eta_1 + \eta_2 = \frac{1}{2}(3q^2 - 7q + 6) - (3q^2 - 8q + 4) + (q - 2),$$

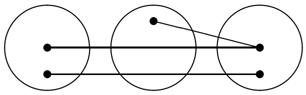
$$3q^2 - 11q + 12 = 0 \text{ и } \; D = 121 - 4\cdot 3\cdot 12 < 0, \text{ что противоречиво.}$$

3.9. Пусть $e_{12}=0$, $e_{23}=1$ и $e_{31}=2$. В этом случае $\xi_3=0$ и $3q=3q+1-\xi_2$, поэтому $\xi_2=1$. Тогда $\eta=\binom{q}{2}+\binom{q-1}{2}+\binom{q}{2}=\frac{1}{2}(3q^2-5q+2)$, так как в силу $\xi_2=1$ одно ребро из E_{23} смежно точно одному ребру E_{31},

$$\eta_1=(q-1)(q-2)+2q(q-2)=3q^2-7q+2,\quad \eta_3=\eta_4=0$$

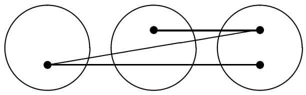
$$\text{и}\quad \eta_2=3-\eta+\eta_1=3-\frac{1}{2}(3q^2-5q+2)+3q^2-7q+2=\frac{1}{2}(3q^2-9q+8).$$

Рассмотрим два возможных случая и в каждом подсчитаем η_2.

а) 

$q+1$ q $q-1$

$\eta_2=1$

б) 

$q+1$ q $q-1$

$\eta_2=q$

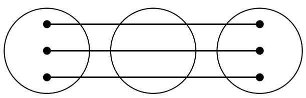
В обоих случаях $\eta_2<q+1$, поэтому $\frac{1}{2}(3q^2-9q+8)<q+1$, $3q^2-11q+6<0$. Отсюда следует $\frac{2}{3}<q<3$, что противоречиво.

3.10. Пусть $e_{12}=e_{23}=0$ и $e_{31}=3$. В этом случае $\xi_2=\xi_3=0$. Тогда

$$\eta=3\binom{q}{2}=\frac{1}{2}(3q^2-3q),\quad \eta_1=3q(q-2)=3q^2-6q,\quad \eta_4=0$$

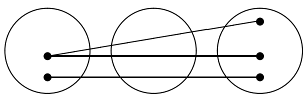
$$\text{и}\quad \eta_2+2\eta_3=3-\eta+\eta_1=3-\frac{1}{2}(3q^2-3q)+3q^2-6q=\frac{1}{2}(3q^2-9q+6).$$

Рассмотрим шесть возможных подслучаев и в каждом подсчитаем $x=\eta_2+2\eta_3$:

а) 

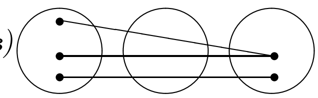
$q+1$ q $q-1$

$x=\binom{3}{2}+2\cdot 0=3$

б) 

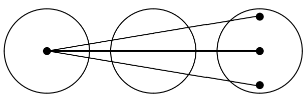
$q+1$ q $q-1$

$x=q+2+2\cdot 0=$
$=q+2$

в) 

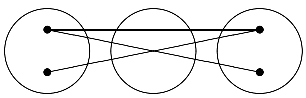
$q+1$ q $q-1$

$x=(q-2)+2+$
$+2\cdot 0=q$

г) 

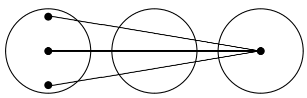
$q+1$ q $q-1$

$x=\binom{3}{2}q+2\cdot 0=3q$

д) 

$q+1$ q $q-1$

$x=(q-1)+(q-3)+$
$+2\cdot 1=2(q-1)$

е) 

$q+1$ q $q-1$

$x=\binom{3}{2}(q-2)+$
$+2\cdot 0=3(q-2)$

В подслучае г) имеем $3q^2-9q+6=6q$, т. е. $q^2-5q+2=0$ и поэтому $q=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$, что невозможно, так как q – целое число.

В остальных подслучаях всегда выполняется $\eta_2 + 2\eta_3 < 3(q-1)$, так как $q \geqslant 4$. Отсюда следует $3q^2 - 9q + 6 < 6(q-1)$, т. е. $q^2 - 5q + 4 < 0$ и поэтому $1 < q < 4$, что противоречиво.

4-й случай. Пусть $v = (q, q, q)$. Тогда $e = 1 + 2 + 1 = 4$ и

$$\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = -(I_3(u) - I_3(v)) = -(-(q+2) - 2(q-1) - q) = 4q.$$

Очевидно,

$$\xi_1 = e_{12}q + e_{23}q + e_{31}q = (e_{12} + e_{23} + e_{31})q = 4q.$$

Следовательно, $\xi_2 = \xi_3 = 0$. Отметим, что $I_4(u) - I_4(v) = 3q - 3q + 3 - 0 = 3$.

Кроме того,

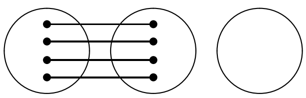
$$\eta = 4\binom{q}{2} = 2q^2 - 2q, \quad \eta_1 = 4(q-1)^2 = 4q^2 - 8q + 4 \quad \text{и}$$

$$\begin{aligned}\eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 &= I_4(u) - I_4(v) - \eta + \eta_1 = \\ &= 3 - 2q^2 + 2q + 4q^2 - 8q + 4 = 2q^2 - 6q + 7.\end{aligned}$$

Случаи	e_{12}	e_{23}	e_{31}
1	4	0	0
2	3	1	0
3	2	2	0
3	2	1	1

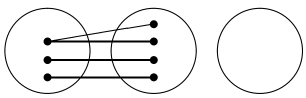
Заметим, что e_{12}, e_{23}, e_{31} играют симметричную роль, поэтому проведем классификацию случаев по e_{12}.

4.1. Пусть $e_{12} = 4$, $e_{23} = e_{31} = 0$. Рассмотрим следующие десять возможных случаев и в каждом из них подсчитаем $\eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 = x$:

а) 

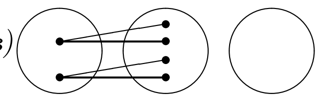
$q \quad q \quad q$

$x = \binom{4}{2} + 2 \cdot 0 +$
$+3 \cdot 0 = 6$

б) 

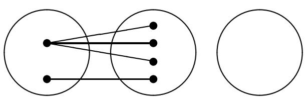
$q \quad q \quad q$

$x = (q-1) + 5 + 2 \cdot 0 +$
$+3 \cdot 0 = q + 4$

в) 

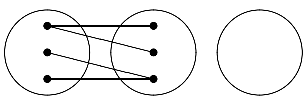
$q \quad q \quad q$

$x = 2(q-1) + 4 +$
$+2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 2q + 2$

г) 

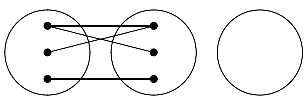
$q \quad q \quad q$

$x = 3(q-1) + 3 +$
$+2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 3q$

д) 

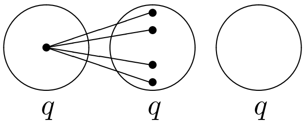
$q \quad q \quad q$

$x = 2(q-1) + 4 +$
$+2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 2q + 2$

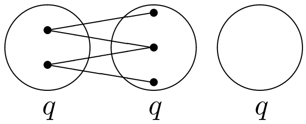
е) 

$q \quad q \quad q$

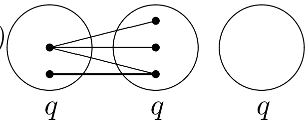
$x = 2(q-2) + 3 +$
$+2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 2q + 1$

ж) 

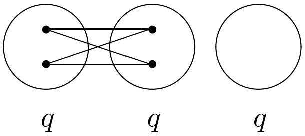
$x = 6(q-1) + 2\cdot 0 +$
$+3\cdot 0 = 6q - 6$

з) 

$x = 2(q-2) + (q-3) +$
$+1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 0 =$
$= 3q - 2$

и) 

$x = (q-1) + 2(q-2) +$
$+(q-3) + 2\cdot 2 +$
$+3\cdot 0 = 4q - 4$

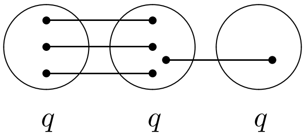
к) 

$x = 4(q-2) + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 = 4q - 5$

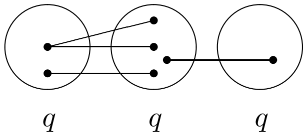
В случае ж) имеем $2q^2 - 6q + 7 = 6(q-1)$, т. е. $2q^2 - 12q + 13 = 0$ и поэтому $q = \frac{6\pm\sqrt{10}}{2}$, что невозможно, так как q – целое число.

В остальных случаях всегда выполняется $x < 4q - 1$, так как $q \geqslant 4$. Следовательно, $2q^2 - 6q + 7 < 4q - 1$, т. е. $q^2 - 5q + 4 < 0$ и поэтому $1 < q < 4$, что противоречиво.

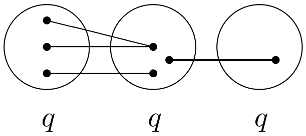
4.2. Пусть $e_{12} = 3$, $e_{23} = 1$, $e_{31} = 0$, $\eta_4 = 0$. Рассмотрим шесть возможных случаев и в каждом подсчитаем $\eta_2 + 2\eta_3 = x$:

а) 

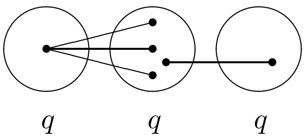
$x = \binom{3}{2} + 2\cdot 0 = 3$

б) 

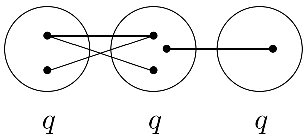
$x = (q-1) + 2 +$
$+2\cdot 0 = q + 1$

в) 

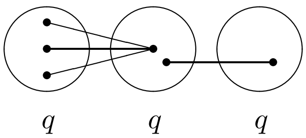
$x = (q-1) + 2 +$
$+2\cdot 0 = q + 1$

г) 

$x = \binom{3}{2}(q-1) +$
$+2\cdot 0 = 3q - 3$

д) 

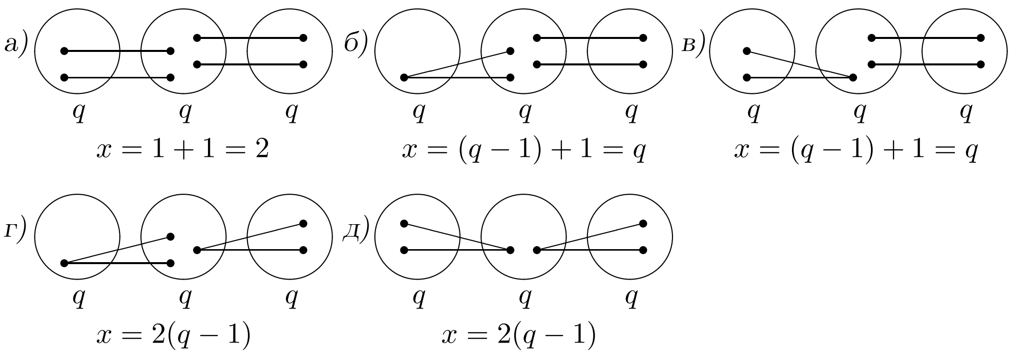
$x = 2(q-2) +$
$+2\cdot 1 = 2q - 2$

е) 

$x = \binom{3}{2}(q-1) +$
$+2\cdot 0 = 3q - 3$

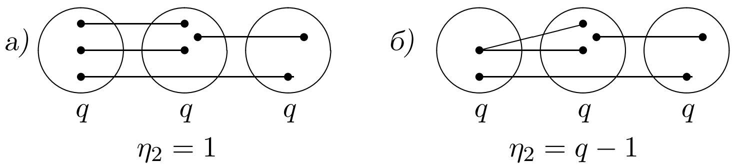
Во всех случаях имеем $x < 3q - 2$. Поэтому $2q^2 - 6q + 7 < 3q - 2$, откуда следует $2q^2 - 9q + 9 < 0$, т. е. $\frac{3}{2} < q < 3$, что противоречиво.

4.3. Пусть $e_{12} = e_{23} = 2$, $e_{31} = 0$, $\eta_3 = \eta_4 = 0$. Рассмотрим пять возможных случаев и в каждом подсчитаем η_2:



Во всех случаях имеем $\eta_2 < 2q + 1$. Поэтому $2q^2 - 6q + 7 < 2q + 1$, откуда следует $q^2 - 4q + 3 < 0$, т. е. $1 < q < 3$, что противоречиво.

4.4. Пусть $e_{12} = 2$, $e_{23} = e_{31} = 1$, $\eta_3 = \eta_4 = 0$. Рассмотрим два возможных подслучая и в каждом подсчитаем η_2:



Во всех подслучаях $\eta_2 < q + 1$. Следовательно, $2q^2 - 6q + 7 < q + 1$, т. е. $2q^2 - 7q + 6 < 0$. Отсюда получаем $\frac{3}{2} < q < 2$, что невозможно.

Предложение 6 доказано.

Теперь из предложений 2–6 с учетом строения решетки $NPL(n, 3)$ при $r = 0$ вытекает наша теорема.

Высотой элемента в конечной решетке будем, как обычно, называть длину кратчайшей цепи (т. е. число ее звеньев) от данного элемента до наименьшего элемента решетки. Нашу теорему можно переформулировать следующим образом.

Теорема 2. *Пусть n – натуральное число такое, что $n \equiv 0 (mod\ 3)$ и h – неотрицательное целое число $\leqslant 3$. Тогда любой полный трехдольный n-граф с неодноэлементными долями, имеющий высоту h в решетке $NPL(n, 3)$, является хроматически определяемым.*

Иными словами, теорема утверждает, что при $r = 0$ графы, имеющие неодноэлементные доли и лежащие на четырех «нижних слоях» решетки $NPL(n, 3)$, хроматически определяемы.

1. Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В. В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
2. Read R. C. An introduction to chromatic polynomials // J. Comb. Theory. 1968. Vol. 4. P. 52–71.
3. Farrell E. J. On chromatic coefficients // Discrete Math. 1980. Vol. 29. P. 257–264.
4. Баранский В. А., Вихарев С. В. О хроматических инвариантах двудольных графов // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 36. (Математика и механика; Вып. 7). С. 25–34.
5. Read R. C., Tutte W. T. Chromatic polynomials // Selected Topics in Graph Theory 3. L.: Academic Press, 1988. P. 15–42.
6. Koh K. M., Teo K. L. The search for chromatically unique graphs // Graphs Combin. 1990. Vol. 6. P. 259–285.
7. Koh K. M., Teo K. L. The search for chromatically unique graphs II // Discrete Math. 1997. Vol. 172. P. 59–78.
8. Chia G. L. Some problems on chromatic polynomials // Ibid. P. 39–44.
9. Zhao H. Chromaticity and adjoint polynomials of graphs: Ph. D. Thesis. The Netherlands: Wöhrmann Print Service, 2005.
10. Эндрюс Г. Теория разбиений. М.: Наука, 1982.

Статья поступила 07.11.2007, окончательный вариант 12.02.2008